

# Theorie Woche 5:

◦ Basis in einem Funktionsraum: Skript S. 59 & 61

Die Frage kommt auf, was denn die Basis im Raum der Polynome vom Grad kleiner 5 ist. Oder wie man in einem Vektorraum bestehend aus Funktionen zeigt, dass etwas eine Basis ist.

Die Beispiele 52 & 56 im Skript behandeln genau diese Fragen.

◦ Kern & Bild einer linearen Abbildung: Skript S. 79f

Die Definition und Eigenschaften des Kern & Bildes einer lin. Abb., sowie einige Beispiele zur Bestimmung derselben, finden sich im Skript.

◦ Basis des Kernes und Bildes: —

• Basis des Kernes:

Es gilt generell, dass die Basis den Vektoren des Kernes entsprechen.

Beispiel 5.1: 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{II - 3I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} x_4 = s, x_3 = t, x_2 = -2s, \\ x_1 = -2t \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \left\{ t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

• Basis des Bildes:

Bildmatrix gausen, Pivotspalten  $\hat{=}$  Spaltenvektoren der Basis.

Beispiel 5.2: (wie oben)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Basis Bild}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$